

מבוא למתמטיקה לכלכלנים

פרק 3 - חשבון דיפרנציאלי - פונקצית הערך המוחלט

תוכן העניינים

1. כתיבה וסרטוט של פונקציות ערך מוחלט.....1
2. פתרון וחקירה של משוואות עם ערך מוחלט.....6
3. תחום הגדרה של פונקציות עם ערך מוחלט.....7
4. גזירה של פונקציות עם ערך מוחלט.....8

כתיבה וסרטוט של פונקציות ערך מוחלט:

סיכום כללי:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \quad \text{פונקציה הערך המוחלט מוגדרת:}$$

כדי לסרטוט פונקציות עם ערך מוחלט, או שמכילות ביטויים עם ערכים מוחלטים, יש לעקוב אחר השלבים הבאים:

- יש למצוא את הנקודות שמאפסות את כל אחד מהערכים המוחלטים.
- יש לחלק את הפונקציה לתחומים עבור כל האפשרויות הקיימות.
- עבור כל תחום יש לכתוב את הפונקציה המתקבלת ללא סימן הערך המוחלט ולסרטוט אותה במערכת צירים.

הערה:

ניתן להיעזר בטכניקה אלגברית בסיסית על מנת לפשט פונקציות בטרם הניתוח והסרטוט שלהן כגון: $f(x) = x^2|x| - 3|x| = |x|(x^2 - 3)$.

שאלות:

1) לפי הפונקציה הבאה: $f(x) = |x+4| - |4x| + 1$. כתוב את הפונקציה ללא סימן הערך המוחלט, כפונקציה מוגדרת למקוטעין.

2) לפי הפונקציה הבאה: $f(x) = 3x - |x+3-x|$. כתוב את הפונקציה ללא סימן הערך המוחלט, כפונקציה מוגדרת למקוטעין.

סרטט את הפונקציות הבאות במערכת צירים:

$$f(x) = |x+2| \quad (4) \qquad f(x) = |x| - 1 \quad (3)$$

$$f(x) = |x-1| + |2-x| - 3 \cdot |x+1| + x \quad (6) \qquad f(x) = |2x+1| + |x-3| \quad (5)$$

$$f(x) = x|x| \quad (8) \qquad f(x) = 2|x| + x \quad (7)$$

$$f(x) = |x^2 + 6x - 8| \quad (10) \qquad f(x) = x^2 + 2|x| - 3 \quad (9)$$



$$f(x) = (x-3)|x+1| \quad (12)$$

$$f(x) = -2x|x| + |7x| - 5 \quad (11)$$

$$f(x) = x^3 - |x| \quad (14)$$

$$f(x) = |9x - x^3| \quad (13)$$

$$f(x) = 2x^2|x| - 7x|x| + 3|x| \quad (16)$$

$$f(x) = |x|^3 - 4x^2 \quad (15)$$

$$(17) \text{ לפי הפונקציה: } f(x) = 6x - 2x^2.$$

א. סרטט את $f(x)$ במערכת צירים.

ב. סרטט באותה מערכת הצירים את $g(x) = 6|x| - 2x^2$.

ג. הוסף למערכת הצירים את גרף הפונקציה: $h(x) = |6|x| - 2x^2|$.

$$(18) \text{ לפי הפונקציה: } f(x) = 9x^2 - 8x - 1.$$

$$\text{מגדירים: } g(x) = 9x|x| - 8x - 1 \text{ ו- } h(x) = 9x^2 - 8|x| - 1.$$

א. סרטט במערכת צירים אחת את הפונקציות $g(x)$ ו- $h(x)$.

ב. סרטט במערכת צירים חדשה את הפונקציה $|h(x)|$.

$$(19) \text{ נתונות הפונקציות הבאות: } f(x) = \frac{|x|}{x} \text{ ו- } g(x) = \frac{x}{|x|}.$$

האם המשוואות הנ"ל מייצגות את אותה הפונקציה?

אם כן – הסבר וסרטט את גרף הפונקציה, אם לא – נמק.

$$(20) \text{ מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות: } f(x) = |x^2 - 4|, g(x) = |x+1| + |x-2|.$$

$$(21) \text{ לפי הפונקציות הבאות: } f(x) = |(x-2)(x+4)|, g(x) = |(x-5)(x+4)|.$$

א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות.

ב. כיצד תשתנה התוצאה אם במקום $g(x)$ ניקח: $h(x) = |(x-5)(x-4)|$?

$$(22) \text{ נתונות הפונקציות: } f(x) = |x|x + 3 \text{ ו- } g(x) = ax^2, (a \neq 0).$$

מצא עבור אלו ערכים של a הגרפים נחתכים בשתי נקודות, נקודה אחת ולא נחתכים כלל.

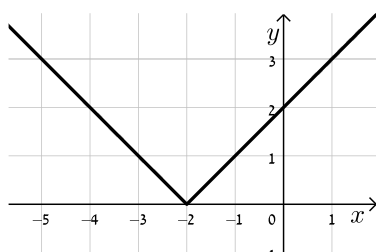
תשובות סופיות:

$$f(x) = |x+4| - |4x| + 1 = \begin{cases} -3x+5 & x \geq 0 \\ 5x+5 & -4 \leq x < 0 \\ 3x-3 & x < -4 \end{cases} \quad (1)$$

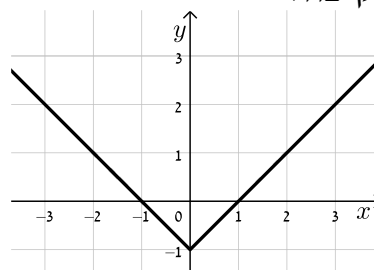
$$f(x) = 3x - |x+|3-x|| = \begin{cases} x+3 & x \geq 3 \\ 3x-3 & x < 3 \end{cases} \quad (2)$$

להלן סקיצות של הפונקציות:

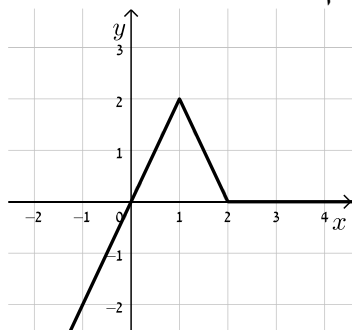
(4) סקיצה:



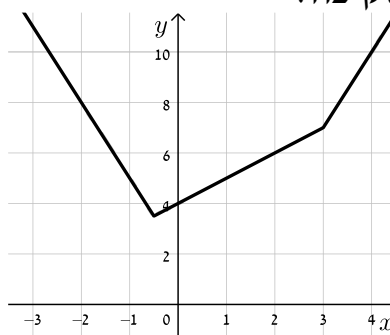
(3) סקיצה:



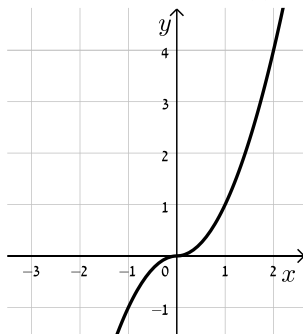
(6) סקיצה:



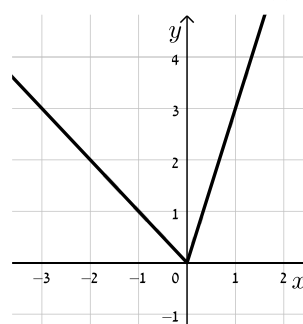
(5) סקיצה:



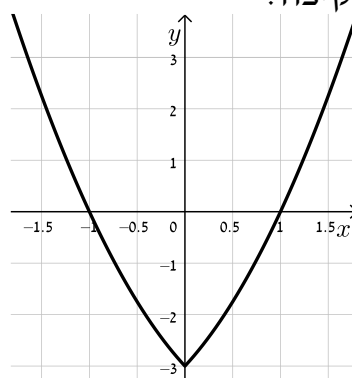
(8) סקיצה:



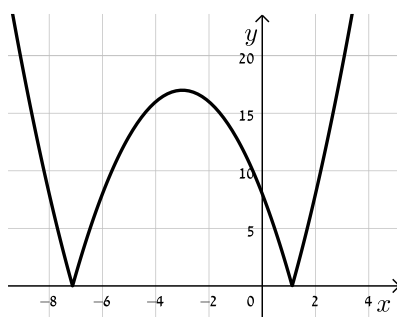
(7) סקיצה:



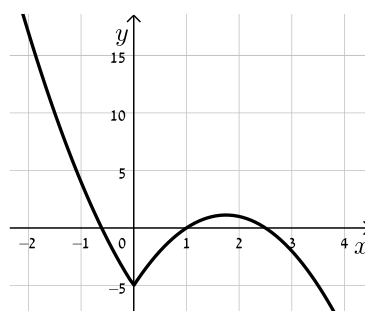
9) סקיצה:



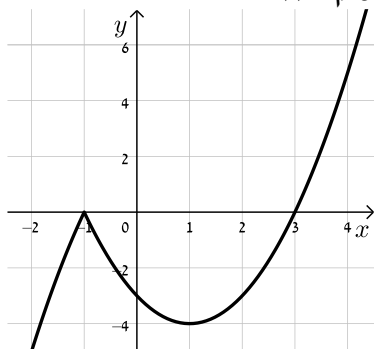
10) סקיצה:



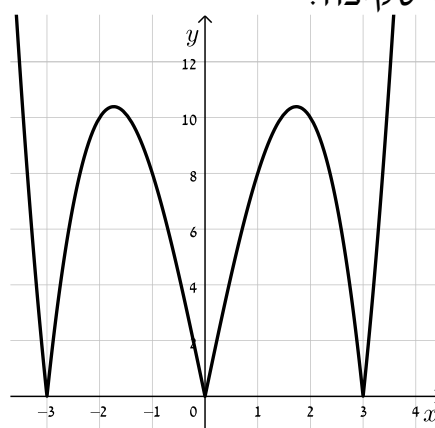
11) סקיצה:



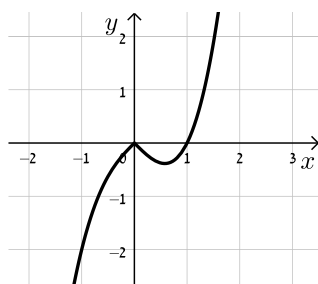
12) סקיצה:



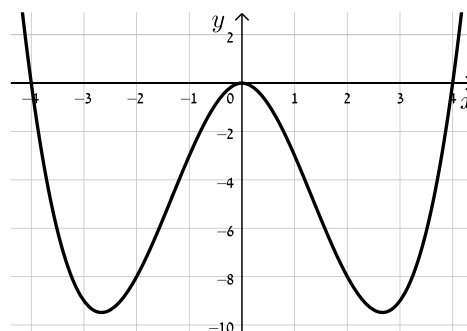
13) סקיצה:



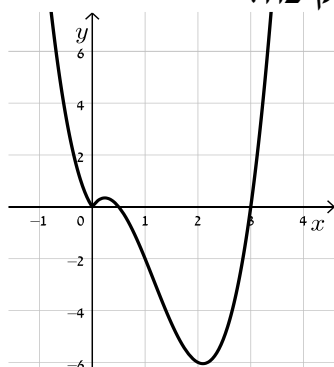
14) סקיצה:



15) סקיצה:



16) סקיצה:





- (17) פתרון מלא בסרטון הוידאו.
- (18) פתרון מלא בסרטון הוידאו.
- (19) כן, מדובר באותה הפונקציה.
- (20) $(-3.45, 7.9)$, $(3, 5)$, $(-1, 3)$, $(1, 3)$.
- (21) א. $(-4, 0)$, $(3.5, 11.25)$. ב. יהיה רק פתרון אחד והוא: $(2.55, 3.57)$.
- (22) שני פתרונות: $a > 1$, פתרון יחיד: $-1 < a < 1$ וגם $a \neq 0$ מת.ה., אף פתרון: $a \leq -1$.

פתרון וחקירה של משוואות עם ערך מוחלט:

סיכום כללי:

כדי לחקור משוואות המכילות פרמטר וביטויים עם ערך מוחלט, יש להפריד את המשוואה לתתי-משוואות, לפי כל תחום של המשתנה עבורו סימן הערך המוחלט הוא חיובי או שלילי. לאחר מכן יש לפתור כל משוואה בנפרד ולאחד את הפתרונות.

שאלות:

(1) עבור אילו ערכים של m יש למשוואה $|x^2 - 2x - 3| = m - 1$ שלושה פתרונות?

(2) לפניך הפונקציה הבאה: $f(x) = |x^2 - x - 2| + x|x|$

א. צייר את גרף הפונקציה במערכת צירים.

ב. מצא עבור אלו ערכי k יש למשוואה $|x^2 - 2x - 3| + k = x - x|x| - 1$ פתרון אחד בלבד.

(3) לפניך הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{|x-3|}{x^2-9} + \frac{x-3}{|x-3|}$

א. סרטט את הפונקציה במערכת צירים (זכור לפשט תחילה).

ב. מצא לאלו ערכים של a יהיה למשוואה $f(x) = a$ פתרון אחד בלבד.

(4) לפניך הפונקציה: $f(x) = |x^2 - 6x + 8| + |x^2 - 6x + 5|$ והישר: $y = m$.

א. סרטט גרף של $f(x)$ במערכת צירים.

ב. מצא את התחומים של m עבורם לישר $y = m$ יהיו יותר משתי נקודות

חיתוך שונות עם גרף הפונקציה $f(x)$.

תשובות סופיות:

(1) $m = 5$.

(2) א. ראה סרטוט בסרטון הוידאו. ב. $k = -1$.

(3) א. ראה סרטוט בסרטון הוידאו. ב. $a < -\frac{7}{6}$, $-1 < a \leq 1$, $a \geq \frac{7}{6}$.

(4) $3 \leq m \leq 5$.

תחום הגדרה של פונקציות עם ערך מוחלט:

סיכום כללי:

כדי למצוא תחום הגדרה של פונקציה עם ערך מוחלט יש לוודא כי הערכים של המשתנה לא יוצרים ביטויים חסרי משמעות (כגון חלוקה באפס, או ערך שלילי בתוך שורש ממעלה זוגית).

שאלות:

מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \frac{|3-x|}{x-1} \quad (2)$$

$$f(x) = |x^2 - 1| + x + 3 \quad (1)$$

$$f(x) = \sqrt{|x| - 2} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{3}{x} + \frac{4}{|x| - 4} \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{3}{2|\sin x| - 1} \quad (6)$$

$$f(x) = \frac{|2x+1| - 3}{\sqrt{4 - |x|}} \quad (5)$$

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{כל } x$$

$$(2) \quad x \neq 1$$

$$(3) \quad x \neq 0, \pm 4$$

$$(4) \quad x \geq 2, x \leq -2$$

$$(5) \quad -4 < x < 4$$

$$(6) \quad x \neq \frac{\pi}{6} + \pi k, x \neq \frac{5\pi}{6} + \pi k$$

גזירה של פונקציות עם ערך מוחלט:

סיכום כללי:

נגזרת של פונקציות הערך המוחלט: $f(x) = |x|$ היא: $f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$.

עבור פונקציה פנימית $f(x) = |g(x)|$ נעזר בכלל השרשרת: $f'(x) = \begin{cases} g(x) & g(x) > 0 \\ -g(x) & g(x) < 0 \end{cases}$.

הערה:

נסמן נקודת אפס של ביטוי עם ערך מוחלט ב- x_0 ונאמר כי אם ערך הנגזרת מימין ומשלא לנקודה זהה אז הפונקציה **גזירה** בנקודה x_0 , אחרת היא אינה גזירה בנקודה זו.

דוגמא:

לפונקציה: $f(x) = |x|$ יש נקודת אפס $x_0 = 0$ והנגזרת: $f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$.

ערך הנגזרת הימני הוא $f'(x=0^+) = 1$ והשמאלי הוא $f'(x=0^-) = -1$.

היות ו- $f'(x=0^+) \neq f'(x=0^-)$ נאמר כי הפונקציה אינה גזירה ב- $(0,0)$.

שאלות:

גזור את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = |x^2 - 3x + 2| \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{|x|}{x-1} \quad (3)$$

$$f(x) = \sqrt{3x - |3-x|} \quad (5)$$

$$f(x) = \sin|x| \quad (7)$$

$$f(x) = x^3 + \frac{2}{3}|x| + 1 \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{|x| + 2} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{5-x}{\sqrt{|x|+6}} \quad (6)$$

$$f(x) = \sqrt{3|x| - \cos x} + 1 \quad (8)$$



(9) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x) = x \cdot |x+2| + 3$ בנקודות:

א. $x = -3$.

ב. $y = 3$.

(10) לפניך הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{x+|x|}{x+1}$.

א. הוכח כי הפונקציה מקיימת: $0 \leq f(x) < 2$ לכל x בתחום הגדרתה.

ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x = 3$.

(11) לפניך הפונקציה: $f(x) = \frac{3}{\sqrt{|2x+1|+x^2}}$.

א. הראה כי הפונקציה מוגדרת לכל x .

ב. מצא את הערך המירבי של הפונקציה.

ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר בנקודת החיתוך

של הישר $y = \frac{3}{\sqrt{2}}$ וגרף הפונקציה ברביע השני.

תשובות סופיות:

(1) $f'(x) = \begin{cases} 2x-3 & x < 1, x > 2 \\ -2x+3 & 1 < x < 2 \end{cases}$, בנקודות $(1,0)$, $(2,0)$ הנגזרת לא קיימת.

(2) $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + \frac{2}{3} & x > 0 \\ 3x^2 - \frac{2}{3} & x < 0 \end{cases}$, בנקודה $(0,1)$ הנגזרת לא קיימת.

(3) $f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(x-1)^2} & x > 0, x \neq 1 \\ \frac{1}{(x-1)^2} & x < 0 \end{cases}$, בנקודה $(0,0)$ הנגזרת לא קיימת.

(4) $f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2+4x-1}{(x+2)^2} & x > 0 \\ \frac{-x^2+4x+1}{(-x+2)^2} & x < 0 \end{cases}$, בנקודה $(0, \frac{1}{2})$ הנגזרת לא קיימת.

$$(5) \quad f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{4x-3}} & \frac{3}{4} < x < 3 \\ \frac{1}{\sqrt{2x+3}} & x > 3 \end{cases} \quad \text{בנקודה } (3,3) \text{ הנגזרת לא קיימת.}$$

$$(6) \quad f'(x) = \begin{cases} \frac{-x-17}{2(\sqrt{x+6})^3} & x > 0 \\ \frac{-x-7}{2(\sqrt{-x+6})^3} & x < 0 \end{cases} \quad \text{בנקודה } \left(0, \frac{5}{\sqrt{6}}\right) \text{ הנגזרת לא קיימת.}$$

$$(7) \quad f'(x) = \begin{cases} \cos x & x > 0 \\ -\cos x & x < 0 \end{cases} \quad \text{בנקודה } (0,0) \text{ הנגזרת לא קיימת.}$$

$$(8) \quad f'(x) = \begin{cases} \frac{3+\sin x}{2\sqrt{3x-\cos x+1}} & x > 0 \\ \frac{-3+\sin x}{2\sqrt{-3x-\cos x+1}} & x < 0 \end{cases} \quad \text{בנקודה } (0,0) \text{ הנגזרת לא קיימת.}$$

$$(9) \quad \text{א. } y = 4x + 12 \quad \text{ב. הפונקציה גזירה רק בנקודה } (0,3) \text{ ולכן נמצא את}$$

משוואת המשיק רק שם ונקבל: $y = 2x + 3$.

$$(10) \quad \text{א. הוכחה.} \quad \text{ב. } y = \frac{1}{8}x + 1\frac{1}{8}$$

$$(11) \quad \text{א. הוכחה.} \quad \text{ב. 6.} \quad \text{ג. } y = \frac{3}{\sqrt{2}}x + 3\sqrt{2}$$